

12. November 2007

Das Leitwert-Konzept

von

Ao. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Klaus Kreč
Büro für Bauphysik
A-3562 Schönberg am Kamp Veltlinerstraße 9
Österreich
Tel. +43-2733-8780-2 Fax +43-2733-8780-4
email: dr.krec@aon.at

III. Theoretischer Hintergrund

Eine wichtige Grundlage für die Beschreibung des thermischen Verhaltens eines Körpers stellt der Fourier'sche Wärmestromansatz

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \text{grad } \Theta \quad (1)$$

dar. Dieser Ansatz besagt, dass die Wärmestromdichte \vec{q} proportional zum Temperaturgefälle $\text{grad } \Theta$ ist. Der Proportionalitätsfaktor λ - die Wärmeleitfähigkeit - ist im Fall isotroper Wärmeleitung ein Skalar, im Fall anisotroper Wärmeleitung ein Tensor 2. Stufe. Mit dem negativen Vorzeichen in Gleichung (1) ist sichergestellt, dass die Wärme immer von Orten höherer zu Orten niedrigerer Temperatur fließt.

Die zweite Grundlage zur Beschreibung des thermischen Verhaltens eines Körpers ist durch die Wärmebilanzgleichung

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\text{div } \vec{q} \quad (2)$$

gegeben. Die Divergenz der Wärmestromdichte $\text{div } \vec{q}$ gibt den Überschuss der je Volumen- und Zeiteinheit aus einem betrachteten Volumenelement austretenden Wärme über die in dieses Volumenelement eintretende Wärme an. Die zeitliche Änderung der Temperatur $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$ ist somit negativ, wenn $\text{div } \vec{q}$ positiv ist, also mehr Wärme aus dem Volumenelement abfließt als in das Volumenelement hinein fließt; die Temperatur Θ des Volumenelements nimmt somit ab. Im Fall negativer Divergenz, also bei einem Überschuss an zufließender Wärme, erwärmt sich das Volumenelement; $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$ wird also positiv. Das Ausmaß der Erwärmung bzw. Abkühlung wird durch das Produkt $c \cdot \rho$, die volumenbezogene spezifische Wärmekapazität, bestimmt. Die spezifische Wärmekapazität c beschreibt die Wärmeaufnahme des Volumenelements bei isothermer Erwärmung und ist auf die Temperaturdifferenz und die Masseneinheit bezogen. Die Multiplikation mit der Massendichte ρ ergibt somit die auf das Volumen und die Temperaturdifferenz bezogene Wärmekapazität $c \cdot \rho$.

III.1 Die Wärmeleitungsgleichung

Wird nun der Fourier'sche Wärmestromansatz (1) mit der Bilanzgleichung (2) kombiniert, so ergibt sich die Wärmeleitungsgleichung in der Form

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} \Theta) \quad , \quad (3)$$

deren Aufstellung und Lösung der Schlüssel zur Beschreibung des thermischen Verhaltens von beliebig zusammen gesetzten und gestalteten Körpern ist.

Als Materialkenngrößen zur Beschreibung des thermischen Verhaltens eines Körpers treten in der instationären Wärmeleitungsgleichung (3) die

- Wärmeleitfähigkeit λ ,
- die spezifische Wärmekapazität c und
- die Massendichte ρ

auf. Im allgemeinen Ansatz (3) können diese Kenngrößen in beliebiger Art vom Ort, von der Temperatur und sonstigen Zustandseigenschaften – wie z. B. dem Feuchtigkeitsgehalt – abhängen. Da eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in ihrer allgemeinen Form nur sehr schwer – oft überhaupt nicht – möglich ist, werden im Rahmen der Bauphysik vereinfachende Annahmen so getroffen, dass einerseits die Genauigkeit der Ergebnisse nur in zulässiger Größenordnung beeinflusst aber andererseits die Fragestellung – jene nach dem thermischen Verhalten einer Baukonstruktion – beantwortbar wird.

III.2 Das Leitwert-Konzept

Wird nun postuliert, dass die in der Wärmeleitungsgleichung (3) aufscheinenden Materialkenngrößen nur ortsabhängig, aber in Hinblick auf andere Zustandseigenschaften wie Temperatur, Feuchtigkeitsgehalt, etc. konstant sind, so vereinfacht sich das Problem der Lösung der Wärmeleitungsgleichung bereits erheblich. Zudem wird üblicherweise angenommen, dass auch alle Abmessungen einer Baukonstruktion konstant sind, also z. B. nicht von der Temperatur abhängen. Natürlich ist bekannt, dass sich Materialien mit zunehmender Temperatur ausdehnen und die postulierte Unabhängigkeit der Abmessungen von der Temperatur nicht richtig sein kann. Bei den im Rahmen der Bauphysik üblicher Weise auftretenden Temperaturdifferenzen kann diese Ungenauigkeit aber guten Gewissens in Kauf genommen werden.

Auch eine Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit der Baustoffe von der Temperatur ist natürlich gegeben. Der Verzicht auf die Berücksichtigung dieses Effekts im Zuge der Beschreibung des thermischen Verhaltens von Baukonstruktionen führt jedoch auf Fehler, die vernachlässigbar klein sind. Die Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit vom Feuchtigkeitsgehalt eines Baustoffs ist hingegen meist zu groß, um ignoriert werden zu können. Dennoch wird bei wärmetechnischen Berechnungen zumeist mit von der Feuchtigkeit unabhängigen Wärmeleitfähigkeits-Werten gerechnet und postuliert, dass der eingesetzte, konstante λ -Wert für die „übliche“ Baufeuchtigkeit repräsentativ ist.

Die Abhängigkeit der Massendichte von Temperatur und Feuchtigkeitsgehalt des Baustoffs wird ebenfalls ignoriert. Im Fall der Temperatur ist dies sicherlich zulässig. Die Abhängigkeit der Massendichte von der Feuchtigkeit bzw. dem Wassergehalt kann hingegen durchaus wichtig sein. Auch hier hilft man sich meist durch Ansätze, die die „übliche“ Baufeuchtigkeit repräsentieren sollen.

Bezüglich der spezifischen Wärmekapazität ist die Situation insofern weit weniger geklärt, als Werte dieser Materialeigenschaft nicht immer mit der erwünschten Genauigkeit vorliegen und

die Abhängigkeit dieser Größe von Temperatur und Feuchtigkeit kaum untersucht ist. Der Forschungsbedarf in diesem Bereich ist durchaus erheblich.

Eine weitere wesentliche Vereinfachung der Problematik der Beschreibung des thermischen Verhaltens von Baukonstruktionen ergibt sich, wenn die komplexen Zusammenhänge des Wärmeübergangs an den Bauteiloberflächen grob vereinfachend beschrieben werden. Üblicherweise wird auf den auf Newton zurück gehenden Ansatz

$$\bar{q} = \alpha_s \cdot (\Theta_a - \Theta_s) = \frac{1}{R_s} \cdot (\Theta_a - \Theta_s) \quad (4)$$

zurück gegriffen. Für die Wärmestromdichte \bar{q} von der Raumluft zur Bauteiloberfläche wird damit ein linearer Zusammenhang mit der Differenz aus der Lufttemperatur Θ_a und der Oberflächentemperatur Θ_s postuliert. Der Proportionalitätsfaktor ist der Wärmeübergangskoeffizient α_s . In den heutigen Normen sind generell die Reziprokwerte von α_s , also die Wärmeübergangswiderstände R_s festgelegt.

Das Konzept der Wärmeübergangswiderstände stellt insofern eine grobe Näherung dar, als der Wärmeübergang an der Oberfläche eines Bauteils in erster Linie durch den Strahlungsaustausch und konvektive Wärmetransportvorgänge bestimmt wird. Die Wärmeleitung in der Luft spielt kaum eine Rolle. Durch den Ansatz (4) wird der Wärmeübergang als Teil des Modells der Wärmeleitung behandelt und zudem die bekanntlich nicht linearen Prozesse der Wärmestrahlung und Konvektion durch einen linearen Ansatz beschrieben.

Obzwar dem Ansatz (4) nur der Charakter einer groben Näherung zugeschrieben werden kann, wird er im Bauwesen generell verwendet. Bei der hier in erster Linie anstehenden Fragestellung – jener nach dem Wärmedurchgang durch Baukonstruktionen – spielen Ungenauigkeiten bei der Beschreibung des Wärmeübergangs an den Bauteiloberflächen für das Ergebnis kaum eine Rolle. Das bewährte, lineare Konzept des Wärmeübergangs kann aus diesem Grund auch hier guten Gewissens übernommen werden.

Eine weitere, meist zulässige Vereinfachung in der Beschreibung des Wärmedurchgangs durch Baukonstruktionen ergibt sich, wenn jedem Raum eines Gebäudes eine einheitliche Lufttemperatur zugeordnet wird. Dies bedeutet, dass sich eventuell einstellende Temperaturverteilungen in den Innenräumen eines Gebäudes – wie z. B. Temperaturschichtungen – nicht berücksichtigt werden und stattdessen eine mittlere Temperatur für jeden Raum angesetzt wird. Bezüglich der äußeren Umgebung des Gebäudes ist in diesem Zusammenhang festzuhalten, dass es grundsätzlich möglich ist, den „Außenraum“ in Abhängigkeit von den außerklimatischen Gegebenheiten in Teilräume zu zergliedern. Mit dem Konzept der „Strahlungslufttemperatur“ [5] ist es zudem möglich, den Einfluss der solaren Einstrahlung aber auch den der langwelligen Zu- und Abstrahlung in einfacher Weise in das Wärmeleitungsmodell zu übernehmen.

Unter den skizzierten vereinfachenden Annahmen ist es möglich, die Wärmeleitungsgleichung für die Gesamtheit der Bauteile eines Gebäudes zumindest für speziell interessierende Sonderfälle aufzustellen und zu lösen. Hierbei bestehen von vornherein weder Einschränkungen in Hinblick auf die Gebäudegröße, die Gebäudeform oder die Anzahl der Räume noch Einschränkungen in Hinblick auf die konstruktive Gestaltung oder die Materialzusammensetzung der Bauteile des Gebäudes.

Im Fall stationärer Verhältnisse, bei denen weder Zeitabhängigkeiten noch Wärmespeicherungseffekte auftreten, ist die stationäre Wärmeleitungsgleichung

$$\text{div}(\lambda \cdot \text{grad } \Theta) = 0 \quad (5)$$

zu lösen. Diese Gleichung ergibt sich unmittelbar aus der Wärmeleitungsgleichung (3), wenn die Ableitung $\frac{d\Theta}{dt}$ verschwindet (, wie es im stationären Fall ja sein muss).

Unter Anwendung der oben skizzierten vereinfachenden Annahmen ergibt sich – wie im Buch „Wärmebrücken“ [6] gezeigt – eine sehr einfache Möglichkeit der Beschreibung der Wärmeflüsse in einem Gebäude für den stationären Fall. Als zentrale Aussage dieses theoretischen Konzepts wird der Zusammenhang zwischen dem Wärmeverlust eines Raums m und den Lufttemperaturen in allen Innen- und Außenräumen gemäß

$$\Phi_m = -\sum_n L_{m,n} \cdot \Theta_n \quad (6)$$

erhalten. Der Wärmeverlust Φ_m des Raums mit dem Index m ist somit proportional zu den Lufttemperaturen in allen Innen- und Außenräumen (Θ_n) des Gebäudes. Die Summe in Gleichung (6) ist also über alle Räume inklusive den betrachteten Raum zu erstrecken. Als Proportionalitätsfaktoren treten in Gleichung (6) die „thermischen Leitwerte“ $L_{m,n}$ auf.

Aus Gründen der Energieerhaltung muss im stationären Fall

$$\sum_n L_{m,n} = 0 \quad (7)$$

gelten, da nur damit sichergestellt ist, dass die Summe der in einen Körper eintretenden Wärmeflüsse gleich der Summe des aus diesem Körper austretenden Wärmeflüsse ist. Für den zu Raum m gehörigen thermischen Leitwert ergibt sich daraus

$$L_{m,m} = -\sum_{n \neq m} L_{m,n} \quad (8)$$

Wird die Beziehung (8) in Gleichung (6) eingesetzt, so ergibt sich der Zusammenhang zwischen Wärmeverlust des Raums m und den Temperaturen in allen anderen Räumen in der eher gewohnten Form

$$\Phi_m = \sum_{n \neq m} L_{m,n} \cdot (\Theta_m - \Theta_n) \quad (9)$$

Das in [6] vorgestellte „Leitwert-Konzept“ hat sich aufgrund seiner Einfachheit und seiner Aussagekraft so bewährt, dass es mittlerweile sowohl in nationale (siehe z. B. ÖNorm B8110-1 [7]) als auch in internationale (siehe z. B. EN ISO 10211-1 [8]) Normenwerke übernommen wurde.

Wie in [9] gezeigt, lässt sich das Leitwert-Konzept unmittelbar auf die Beschreibung des instationären thermischen Verhaltens verallgemeinern, wenn alle Zeitverläufe periodisch angesetzt werden. In diese verallgemeinerte Theorie fügt sich auch die in [6] entwickelte Beschreibung stationärer Zustände als Sonderfall der instationären Betrachtungsweise nahtlos ein. Dies zeigt sich u. a. auch daran, dass die zentrale Beziehung (6) für den instationären Fall formal gleich aufgebaut ist:

$$\hat{\Phi}_m = -\sum_n \tilde{L}_{m,n} \cdot \hat{\Theta}_n \quad (10)$$

$\hat{\Phi}_m$ ist nun die komplexe Amplitude des zeitlichen Verlaufs des Wärmeverlusts von Raum m , $\hat{\Theta}_n$ die komplexe Amplitude der Lufttemperaturschwankung in Raum n . Zu summieren ist über alle Innen- und Außenräume, also auch über den betrachteten Raum m . Die Größen $\tilde{L}_{m,n}$ sind nun komplexwertig und werden in der EN ISO 13786 [10] „harmonische thermische Leitwerte“ genannt.

Anmerkung: Da im Allgemeinen, instationären Fall die Beziehung (7) nicht gilt, ist die in (9) dargestellte Schreibweise dem stationären Fall allein vorbehalten.

Der Zusammenhang (10) zwischen zeitlichem Verlauf des Wärmeverlusts und jenem der Lufttemperatur in den Räumen kann als Grundlage für die Simulation des thermischen Verhaltens von Gebäuden heran gezogen werden [11]. Dieser Zusammenhang ist jedoch nur dann nutzbar, wenn die harmonischen thermischen Leitwerte $\tilde{L}_{m,n}$ für alle interessierenden Harmonischen und den stationären Fall bekannt sind. Vom theoretischen Standpunkt aus betrachtet ist es möglich, die benötigten Leitwert-Matrizen für die Gesamtheit der Bauteile eines Gebäudes zu errechnen. Vom Standpunkt der praktischen Durchführung aus besteht allerdings das Problem, dass die Leitwert-Matrizen nur numerisch, also unter Einsatz von Computerprogrammen ermittelt werden können. Diesen Programmen sind aber naturgemäß Grenzen in Hinblick auf die Feinheit der Modellierung aber auch auf die Größe der zu modellierenden Baukonstruktion gesetzt.

Gerade Mauerwerk aus Hochlochziegeln stellt in diesem Sinn insofern ein besonderes Problem dar, als zum einen sehr fein modelliert werden muss, um das thermische Verhalten eines (kleinen) Ausschnitts aus einer solchen Wand genau genug zu erfassen. Zum anderen besteht die interessierende Gesamtkonstruktion zumeist aus einem Großteil der Gebäudehülle und vielen Innenbauteilen. Die detaillierte Modellierung aller im Gebäude vorkommender Hochlochziegel scheidet aufgrund des Eingabeaufwands aber auch aufgrund der Leistungsfähigkeit der Programme und Computer von vornherein aus.

Ein beliebter Ausweg aus dieser Problematik ist das Rechnen mit „thermisch äquivalenten“ Ersatzkonstruktionen. Gesucht werden hierbei jeweils fiktive Bauteilaufbauten, deren thermisches Verhalten zum einen mittels analytischer Verfahren beschreibbar und zu anderen dem Verhalten der realen Baukonstruktion möglichst ähnlich ist.

Als Ersatzkonstruktionen kommen homogene, plattenförmige Schichten oder aus solchen Schichten zusammengesetzte plattenförmige Bauteile in Frage. Wie in Anhang A.1 detailliert gezeigt, ist das stationäre und instationäre thermische Verhalten solcher Bauteile mit eindimensionalen thermischen Modellen beschreibbar. Damit wird auch die Erfassung sehr großer Baukonstruktionen mit analytischen Methoden möglich.

Im Gegensatz zum stationären Fall, in dem der Wärmedurchgang durch die betrachtete Wand mittels einer homogenen Schicht genau abgebildet werden kann – es ist jeweils lediglich der Durchlasswiderstand gleich anzusetzen –, ist eine genaue Abbildung des instationären Verhaltens in einem solchen thermischen Ersatzmodell nicht möglich. Abgesehen davon, dass das Ersatzmodell je nach Dauer der Temperaturschwankung bzw. der angesetzten Periodenlänge anders aussehen wird, kann auch bei festgehaltener Periodenlänge das Verhalten einer inhomogenen Wand durch eine homogene Ersatzkonstruktion nicht exakt beschrieben werden.

Die Eigenschaften der homogenen Schicht als Ersatzkonstruktion für Mauerwerk aus Hochlochziegeln sind zum einen so anzusetzen, dass eine gute Approximation des thermischen Verhaltens in wichtigen Anwendungsfällen erzielt wird. Da das thermische Verhalten der Wand unter hochsommerlichen Bedingungen besondere Bedeutung hat, wird die Periodenlänge von einem Tag, die in der ÖNorm B8110-3 [12] festgesetzt ist, vorrangig zu beachten sein. Zum anderen muss die Ersatzkonstruktion so aufgebaut sein, dass sie für normativ festgesetzte Kenngrößen die gleichen Ergebnisse liefert wie das ursprünglich betrachtete Mauerwerk.

X. *Literatur*

- [1] *Kreč K.*: Bewertung der Sommertauglichkeit von Gebäuden, Forschungsbericht im Auftrag der Initiative Ziegel im Fachverband der Stein- und keramischen Industrie, 31. März 2006
- [2] *Stockinger, J., Kreč, K. & Seidl, J.*: Thermisch optimierter Einsatz von Ziegel in Passivhäusern, Tagungsbericht der 8. Europäischen Passivhaustagung 2004, 205-219, Krems (2004)
- [3] *Stockinger, J.*: Thermisch optimierter Einsatz von Ziegel im Passivhaus, Master-Thesis, Donau-Universität Krems (2004)
- [4] *Bruckmayer, F.*: Der praktische Wärme- und Schallschutz im Hochbau, Deuticke-Verlag Wien (1949)
- [5] *Koch H. A. & Pechinger, U.*: Möglichkeiten zur Berücksichtigung von Sonnen- und Wärmestrahlungseinflüssen auf Gebäudeoberflächen. Gesundheits-Ingenieur 98, H. 10, S. 265-280, (1977)
- [6] *Heindl W., Kreč K., Panzhauser, E. & Sigmund, A.*: Wärmebrücken. Springer-Verlag Wien-New York (1987)
- [7] ÖNorm B8110-1, Wärmeschutz im Hochbau – Anforderungen an den Wärmeschutz und Nachweisverfahren. (2000)
- [8] EN ISO 10211-1: Wärmebrücken im Hochbau – Wärmeströme und Oberflächentemperaturen – Teil 1: Allgemeine Berechnungsverfahren. (1996)
- [9] *Kreč, K.*: Zur Wärmespeicherung in Baukonstruktionen. Gesundheits-Ingenieur 114, H. 1, S. 11-18, (1993)
- [10] ÖNorm EN ISO 13786: Wärmetechnisches Verhalten von Bauteilen – Dynamisch-thermische Kenngrößen – Berechnungsverfahren, Ausgabe: 2000-08-01 (2000)
- [11] *Kreč, K.*: Zur dreidimensionalen Simulation des thermischen Verhaltens von Gebäuden“, Gesundheits-Ingenieur **121**, Heft 6, 293-344 (2000)
- [12] ÖNorm B8110-3, Wärmeschutz im Hochbau – Wärmespeicherung und Sonneneinflüsse, Ausgabe: 1999-12-01 (1999)
- [13] EN 832, Wärmetechnisches Verhalten von Gebäuden – Berechnung des Heizenergiebedarfs – Wohngebäude (1998)
- [14] ÖNorm EN ISO 13791, Wärmetechnisches Verhalten von Gebäuden - Sommerliche Raumtemperaturen bei Gebäuden ohne Anlagentechnik - Allgemeine Kriterien und Validierungsverfahren (2004)
- [15] ÖNorm EN ISO 6946, Bauteile – Wärmedurchlasswiderstand und Wärmedurchgangskoeffizient – Berechnungsverfahren (2005)
- [16] *Minke, G.*: Lehm- und Ökobuch, Staufbau bei Freiburg (1999)
- [17] AnTherm V3.51, Programmpaket zur Analyse des Thermischen Verhaltens von Bauteilen mit Wärmebrücken, © 2004 – 2007 T. Kornicki (2007)
- [18] GEBA V7.0, Programmpaket zur Simulation des thermischen Verhaltens von Räumen, Raumgruppen und Gebäuden, © 1996 – 2007 K. Kreč (2007)
- [19] THESIM V2.0, Programm zur mehrdimensionalen Thermischen Simulation eines Raums, © 1996 – 2007 K. Kreč (2007)